

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазина Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

11-дәріс. Планеталар мен серіктер қозғалыстарының заманауи теориялар

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға табиғи және жасанды аспан денелерінің ұйытқымалы қозғалысының физикалық мәнін түсіндіру; орталық дененің тығыздалуының, атмосфера кедергісінің және басқа сыртқы факторлардың серіктің орбитасына әсерін талдауды үйрету; екі жылжымайтын центр есебін, эволюция теңдеулерін және олардың алғашқы интегралдарын қарастыру арқылы орбитаның ұзақ мерзімді өзгеріс заңдылықтарын меңгерту.

Жоспар

1. Серіктің қозғалысына орталық дененің тығыздалуының әсері
2. Екі жылжымайтын центр есебі
3. Үшінші дененің серіктің қозғалысына әсері
4. Эволюция теңдеулері мен олардың алғашқы интегралдары
5. Планетаның жасанды серік қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері

Аспан денесінің серігі - басқа орталық денені материалдық нүкте ретінде айналып қозғалатын кез келген аспан денесін айтады. Серіктің ұйытқысыз қозғалысы - эллипстік кеплер қозғалысы болады. *Қозғалыс ұйытқымалы болу үшін келесі факторлар әсер етеді:*

1. орталық дененің гравитациялық өрісінің материалдық нүктенің өрісінен айырмашылығы;
2. материалдық нүкте ретінде қарастырылатын кез келген үшінші дененің әсері;
3. серіктің қозғалысы болып жатқан орта кедергісінің әсері.

Бірінші жағдайда - тығыздалған планетаның табиғи немесе жасанды серіктің қозғалысы немесе ерте спектралды класс жұлдыздың айналасындағы планетаның қозғалысы болады. Екінші жағдайда - бір планетаның екіншісінің қозғалысын ұйытқуы немесе Күннің планета серігінің қозғалысына әсер етуі. Үшінші жағдай ретінде планетаның жасанды серіктің қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері.

1. Серіктің қозғалысына орталық дененің тығыздалуының әсері

Орталық дененің гравитациялық өрісі материалдық нүктенің өрісінен айырмашылығы болады, оның *потенциалы*

$$V = \frac{\mu}{r} + R, \quad (1)$$

R - ұйытқымалы потенциал. Физикалық тұрғысынан қарағанда, осы жағдайда, осьтік айналу қозғалыс кезінде ортадан тепкіш күш әсерінен экватор бойымен дене созылады. Сонда ε - дененің геометриялық сығылуы,

J_2 - гравитациялық потенциалының екінші зоналды гармониканың коэффициенті және q - айналу параметрі келесі байланыста болады

$$q = \frac{\omega^2 a}{\mu}. \quad (2)$$

Сонда

$$J_2 = -\frac{2\varepsilon - q}{3}. \quad (3)$$

Күн жүйесіндегі планеталар үшін J_2 модуль бойынша $10^{-2} \div 10^{-3}$ шамасына тең болады. Сонда, жанасатын элементтер әдісі арқылы планеталар сығылуының серіктердің қозғалысына әсер етуін зерттеуге болады. Осы кезде

$$R = \mu J_2 \cdot \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \cdot \frac{a^2}{r^3}, \quad (4)$$

осында μ - орталық дененің гравитациялық параметрі, a - экваториалдық радиус, θ - потенциал анықталатын нүктенің полярлы қашықтығы. (4) енгізу арқылы орталық дененің экваториалды жазықтығымен байланысты координат жүйесі алынады.

Ұйытқымалы қозғалыстың эволюциялық теңдеулерін анықтау үшін келесі интегралды шешу қажет

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} n a^2 J_2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} \int_0^{2\pi} (3\cos^2 \theta - 1) \frac{d\nu}{r}. \quad (5)$$

Орбита теңдеуінен r мәнін алғанда және $\cos \theta$ анықтаған кезінде (5) келесі теңдеуге айналады

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} \int_0^{2\pi} [3\sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i - 1] (1 + e \cos \nu) d\nu. \quad (6)$$

(6) интегралдау арқылы

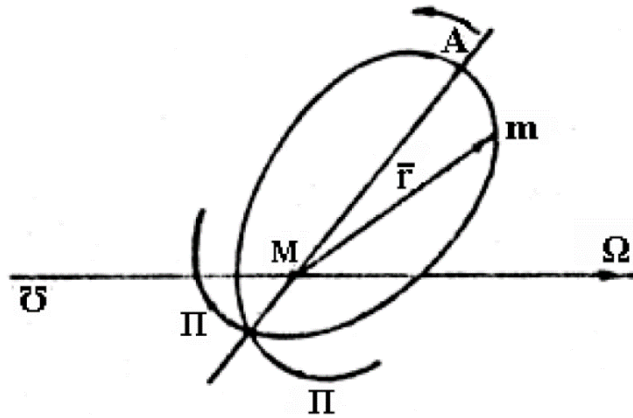
$$\bar{R} = \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{4 p^{3/2}} (1 - 3\cos^2 i). \quad (7)$$

Орташалаңдандырылған потенциал тек i мен p элементтеріне тәуелді болады.

Жанасатын элементтер үшін жазылған Лагранж теңдеулеріне элемент бойынша потенциалдың туындыларын енгізу арқылы келесі теңдеулерді аламыз

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= 0, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{e}}{dt} = 0, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a}{p} \right)^2 \cos i, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a^2}{p} \right) (1 - 5 \cos^2 i).\end{aligned}\tag{8}$$

Сонымен, i, p, e элементтері ғасырлық ұйытқуларға ие болмайды, орбитаның енкеюі, орбитаның өлшемі мен пішіні орташа мәніне қарағанда өзгермейді. (8) теңдеуіндегі соңғы екі теңдеуі бойынша потенциалдың екінші зоналды гармоника әсерінен қозғалыстың ғасырлық ұйытқулары *түйін сызықтарының прецессиясына* және орбита жазықтығындағы *апсид сызықтарының прецессиясына* айналады.



1 сурет – Апсид сызықтарының прецессиясы

Полярлық орбита үшін түйіндер сызықтарының прецессиясының жылдамдығы 0 тең болады және орбитаның енкею мәні азайған сайын үлкееді. $J_2 < 0$ болғандықтан, осы жағдай серіктің орбита бойындағы қозғалысына қарама қарсы бағытта болады. $\cos i = \frac{1}{\sqrt{5}}$ болған кезінде апсид сызықтарының прецессиясының жылдамдығы 0 тең болады, сонда $i \cong 63.5^\circ$ кезінде оның бағыты қарамақарсы бағытқа ауысады. Орбитаның енкею 60° жақын, төмен орналасқан Жердің жасанды серігі үшін түйіндер сызықтарының прецессиясының периоды үш айға жуық, себебі оның жылдамдығы 4° тәулікке болады.

Ескерту: егер «үлкен» Жер айналасындағы «кіші» жасанды серіктің қозғалысы қарастырылса, онда Жер айналу осі төңірегіндегі серіктің орбита жазықтығына қарай нормаль прецессиясы туралы айтылады. Егер «үлкен» Күнді «кіші» Жер айналу қозғалысы қарастырылса, онда оның орбита жазықтығына қарай нормаль маңындағы Жер айналу осінің прецессиясы туралы айтылады. Осы екі жағдайда да бір физикалық құбылыс туралы

айтылады: сығылған дене мен материалдық нүктенің арасындағы олардың салыстырмалы қозғалыс кезіндегі гравитациялық әсерлесуі.

Бұл есеп материалдық нүктенің шекті өлшемі бар денемен әсерлесу әсерінен пайда болатын қозғалысын анықтау есебінің дербес жағдайы ретінде қарастырылған. Аспан механикасында осы есеп Фату есебі деп аталған.

Жер үшін J_2 коэффициенттің шамасы кіші болса да ($|J_2| \cong 10^{-3}$), (8) теңдеулері арқылы, қажетті жуықтау дәлділігімен, жасанды Жер серіктерінің координаттарын есептеуге мүмкін болмайды. Сол себептен келесі есеп қарастырылады.

2. Екі жылжымайтын центр есебі

Инерциалды координат жүйесіндегі m_1 және m_2 жылжымайтын екі материалдық нүктені қарастырамыз. Осы нүктелердің ортақ тартылыс өрісіндегі m материалдық нүктенің қозғалысын зерттеу керек. Физикалық көзқарасынан қарағанда осы есептің қойылуы дұрыс емес. Егер m нүктесін m_1, m_2 нүктелер өзіне тартып жатса, неліктен олар бір-бірін тартпайды және m нүктесімен тартылмайды, ал егер тартылса, сонда қай себептен олар жылжымайтын болады. Бірақ, осы есептің қолдануы кең болу мүмкіндігінен, осы есепті қарастыру керек. Екі жылжымайтын центр есебінің теңдеуі

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = 0. \quad (9)$$

Егер жылжымайтын нүктелердің масса центріне координат басын орналастырғанда және осы нүктелерді қосатын сызық бойымен z осін бағытаған кезінде, келесі теңдеу алынады

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 - 2rc_{1,2} \cos \gamma + c_{1,2}^2}, \quad (10)$$

Осында $c_{1,2}$ - m_1, m_2 нүктелердің аппликатаcы.

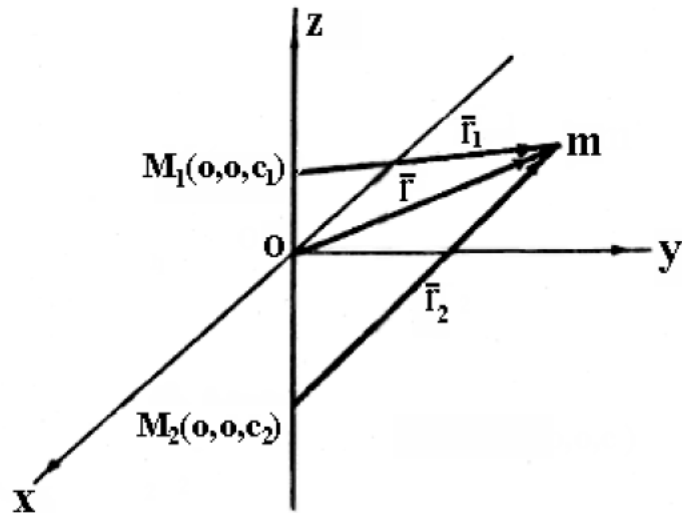
Сонда екі жылжымайтын центр есебінің күштік функциясы

$$V_{12} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \frac{\gamma_k}{r^k} \right], \quad (11)$$

осында

$$\gamma_k = \frac{m_1 c_1^k + m_2 c_2^k}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

- коэффициенттер.



2 сурет – Екі жылжымайтын центр есебі

Функция V_{12} - $m_{1,2}$ және $c_{1,2}$ параметрлерімен берілетін гравитациялық дипольдің потенциалы. Сонда дипольдің параметрлері

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 &= J_2 M a^2, \\ m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 &= J_3 M a^3, \end{aligned} \quad (13)$$

осында M және a - дененің массасы мен экваториалды радиус, J_2 , J_3 - гравитациялық потенциалдың екінші мен үшінші гармоникалардың коэффициенттері. Алдыңғы екі теңдеуден

$$m_1 = -\frac{M c_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{M c_1}{c_1 - c_2}. \quad (14)$$

Және (14)-ті (13) соңғы екі теңдеуіне енгізген кезінде

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 c_2 (c_1 + c_2) = -J_3 a^3 \quad (15)$$

немесе

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 + c_2 = \frac{J_3}{J_2} a.$$

Виета теоремасы бойынша

$$c_{1,2} = \left(\frac{J_3}{J_2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_2} \right)^2 + 4J_2} \right) \frac{a}{2}. \quad (16)$$

Егер экваторға қарағанда дене симметриялы болса, сонда $J_3 = 0$ және

$$c_{1,2} = \sqrt{J_2} a. \quad (17)$$

Егер (14), (16) немесе (17) формулалар бойынша гравитациялық дипольдің параметрлерін анықтасақ, орталық дене өрісіндегі серіктің қозғалыс есебінің дәл шешімін аламыз.

Экваторға байланысты симметриялы дененің декарт пен λ, μ, w эллипстік координаталарының байланысы

$$\begin{aligned} x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w, \\ y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w, \\ z &= c\lambda\mu, \end{aligned} \quad (18)$$

осында $c = |c_{1,2}|$.

Екі жылжымайтын центр есебінің шешімі

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(1+\lambda^2)(\alpha_1 c^2 \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)c\lambda + \alpha_2) + \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_1, \\ \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(1-\mu^2)(\alpha_1 c^2 \mu^2 - \alpha_2) - \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_2, \\ w &= \alpha_3 \int \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} d\tau + \beta_3, \\ t &= c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

осында α_i, β_i -Гамильтон-Якоби әдісінің интегралдау тұрақтылары. Гравитациялық дипольдің параметрлері: 209 км – Жер үшін, 150 км – Марс үшін, 8462 км – Юпитер үшін, 7547 км – Сатурн үшін болады.

3. Үшінші дененің серіктің қозғалысына әсері

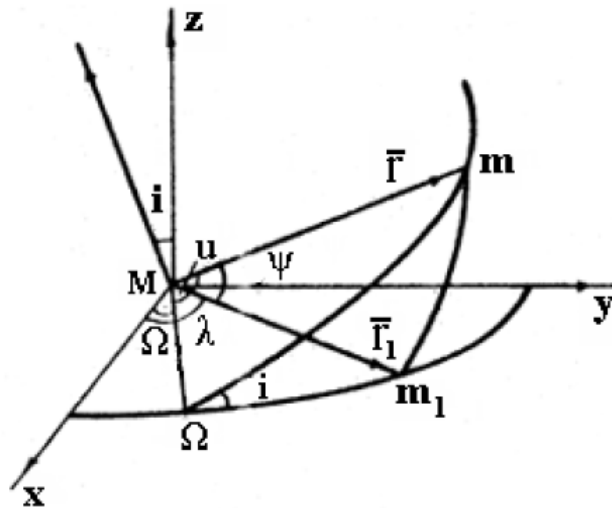
Екі денені материалдық нүкте ретінде қарастырамыз. M массалы орталық денесіне қарағанда m_1 массалы ұйытқу дене шеңбер бойымен r_1 радиусы бар орбитамен және n_1 бұрыштық жылдамдылығымен қозғалады. Осы қозғалыстың жазықтығын координат жүйесінің негізгі жазықтығы ретінде аламыз.

Ұйытқымалы қозғалыстың теңдеуі

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \right), \quad (20)$$

осында оң жақтағы бірінші қосындысы – координат басына (орталық денеге) ұйытқымалы денемен берілетін қарама қарсы таңбасымен үдеу, екінші қосынды – серікке ұйытқымалы денемен берілетін үдеу. Сонда ұйытқымалы потенциал

$$R = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1 \vec{r}}{r_1^3} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \right). \quad (21)$$



3 сурет – m_1 үшінші денемен m серіктің қозғалысын ұйытқу

(21) теңдеуінің бірінші құраушысы $\vec{r}_1$ радиус-вектор серіктің координаттарына тәуелсіз жағдай үшін жазылған. Серік және ұйытқу дененің арасындағы қашықтық

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}| = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \psi + r_1^2}. \quad (22)$$

$r \ll r_1$ шарты орындалады деп есептейміз. Осы жағдай болу мүмкін егер ұйытқу денесі ретінде планетаның табиғи серігі болса немесе егер серіктің қозғалысына Күн - ұйытқымалы дене ретінде әсеретсе. Егер серік пен ұйытқымалы дене арасындағы кері қашықтықты r/r_1 дәрежесі бойынша

қатарға жіктесек және μ_1/r_1 шамасын ескермесек, сонда ұйытқымалы потенциал

$$R = \frac{\mu_1 r^2}{2r_1^3} (3\cos^2 \psi - 1). \quad (23)$$

Суреттегі $m\Omega m_1$ сфералық үшбұрыштан

$$\cos \psi = \cos u \cos(\nu_1 - \Omega) + \sin u \sin(\nu_1 - \Omega) \cos i. \quad (24)$$

Енді (23) арқылы анықталатын ұйытқымалы потенциалды орташалаймыз. Осы жағдайда ол екі айнымалы шамасына тәуелді болады: ν - серіктің шын аномалиясына және ν_1 - ұйытқымалы дененің шын аномалиясына. Егер серік пен ұйытқымалы дененің айналу периодтары әртүрлі болса, сонда әр шамасы бойынша ретімен потенциалды орташалауға болады. Бірінші $\nu_1 = n_1 t$ айнымалы шамасынан бастаймыз.

$$\bar{R} = \frac{1}{T_1} \int_0^T R(\nu_1(t)) dt, \quad (25)$$

осында $T_1 = 2\pi/n_1$ - период. Осы теңдеудің интегралын анықтағанда

$$\bar{R} = \frac{\mu_1 r^2}{4r_1^3} (1 - 3\sin^2 u \sin^2 i) \quad (26)$$

r радиусын орбита теңдеуінен алған кезінде ν - серіктің шын аномалиясы бойынша орташалау интегралы келесі түріне айналады

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\mu_1 p}{4r_1^3 \sqrt{\mu p}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + \nu) d\nu}{(1 + e \cos \nu)^4}. \quad (27)$$

Осы интегралдың шешімі

$$\bar{R} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1 a^2}{r_1^3} [(1 - e^2) \cos^2 i + e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i)], \quad (28)$$

осында a - серіктің жанасатын орбитасының үлкен жартылай осі.

4. Эволюция теңдеулері мен олардың алғашқы интегралдары

Эволюциялық теңдеулерін жазу үшін жанасатын орбитаның кеплер элементтерінен каноникалық элементтер жүйесіне - Делоне элементтеріне ауысу керек. Бұл элементтер кеплер элементтерімен келесі байланыста болады

$$L = \sqrt{\mu a}, G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, l = \pi + M, g = \omega, h = \Omega. \quad (29)$$

Делоне элементтер арқылы жазылған екі рет орташаланған ұйытқымалы потенциал

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1}{r_1^3} \frac{L^4}{\mu^2} \left[\frac{H^2}{L^2} + \frac{L^2 - G^2}{L^2} \left(2 - 5 \frac{G^2 - H^2}{G^2} \sin^2 g \right) \right]. \quad (30)$$

Егер H_0 - ұйытқысыз қозғалыстың гамильтонианы оның толық энергиясына - μ/a сәйкес келсе және гамильтонианның ұйытқуы H_1 - қарама қарсы таңбасымен берілетін $\bar{\bar{R}}$ ұйытқу функциясы болса, Гамильтон функциясы $H = H_0 + H_1$ немесе келесі теңдеумен анықталады

$$H = - \left[\frac{\mu^2}{2L^2} + \bar{\bar{R}}(L, G, H, g) \right]. \quad (31)$$

Гамильтон функциясы l мен h айнымалы шамаларына тәуелсіз болғандықтан, $L = L_0$ және $H = H_0$ алғашқы интегралдары болады. Гамильтон функциясы – алғашқы интеграл ретінде алуға болады, себебі уақытқа тәуелсіз немесе $H = \text{const}$. Кеплер элементтерін қарастырғанда

$$a = a_0, (1-e^2) \cos^2 i = c_1, \quad (32)$$

сонда

$$e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2. \quad (33)$$

Үлкен жарты остерінің ғасырлық ұйытқу болмаған кезіндегі Лаплас теоремасының көрінуі - алғашқы интеграл $a = a_0$.

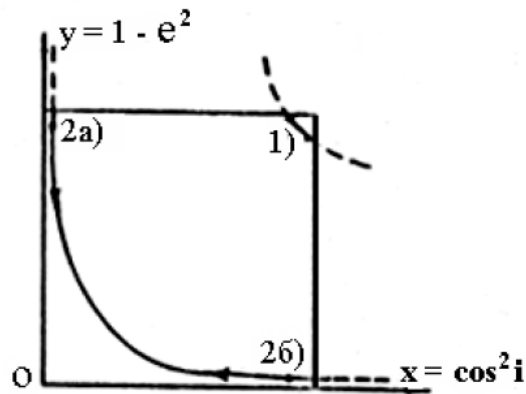
$x = \cos^2 i$ және $y = 1 - e^2$ фазалық жазықтықтағы ұйытқымалы қозғалыстың әрекетін қарастырамыз.

$xu = c_1$ теңбүйірлі гипербола бойымен бейнелейтін нүкте қозғалады.

Екі шекті жағдайды қарастырамыз: 1) $c_1 \cong 1, e \ll 1, i \ll \pi/2$ және 2) $c_1 \ll 1$.

Егер e_0 - эксцентриситеттің және i_0 - орбита еңкеюдің бастапқы мәндері кіші болса - бірінші жағдай орындалады.

Екінші жағдайда бейнелейтін нүктенің екі шекті орналасуын белгілейміз: а) $e \ll 1, i \cong \pi/2$ және б) $e \cong 1, i \ll \pi/2$. Шеңберге жақын түрі және ұйытқу дененің қозғалыс жазықтығына перпендикуляр болатын серіктің орбитасы а) жағдайына сәйкес келеді.



4 сурет – Серіктің ұйытқымалы қозғалыстың орнықты мен орнықсыз жағдайлары: 1 – орнықты - $c \cong 1$; 2 – орнықсыз - $c \ll 1$

Аз мөлшерінде еңкейген, бірақ қатты созылған серіктің орбитасы б) орналасуына сәйкес келеді. Ұйытқымалы қозғалыстың ұзақ уақыт әрекетінде бейнелеу нүктесі а) орналасуынан б) орналасуына ауысады және керісінше болу мүмкін. Сонда екінші жағдайында орбита пішіні мен оның негізгі координат жазықтығына еңкеюіне байланысты ұйытқымалы қозғалыс орнықсыз болады (бұл $(1 - e_0^2) \cos^2 i_0 \ll 1$ бастапқы шарт кезінде болады). Орбита эволюциясы бір шекті күйінен басқасына ауысу тез арада болады. Есептеулер бойынша келесі нәтиже алынды. Егер қазіргі эксцентриситетімен Айдың қазіргі еңкею бұрышын 90° толықтырып, оны осы бұрышқа эклиптикаға еңкейген орбитаға ауыстырсақ, сонда Айдың еңкеюі тез төмендейді, ал орбита эксцентриситеті жоғарылайды. Осы кезде 4,5 жылдан кейін перигейдегі Айдың қашықтығы Жердің радиусына тең болады және Ай Жерге «кұлайды».

Егер (33) интегралында (32)-нің екінші қатынасы арқылы e мәні жойылса, $x = \cos^2 i$ және $z = \sin^2 \omega$ фазалық жазықтығында ұйытқымалы қозғалыстың әрекетін зерттеуге болады. Сонда

$$z = \frac{(2 - c_2)x - 2c_1}{5(x - c_1)(1 - x)}. \quad (34)$$

Осы функцияның әрекеті екі типті болады: а) бірлік шаршы аймағында функцияның экстремум нүктелері болмайды және оның төмен мен жоғары қабырғаларын функция кесіп өтеді; б) функцияның минимумдері болады және бірлік шаршының жоғарғы қабырғасын екі рет кесіп өтеді.

а) жағдайында:

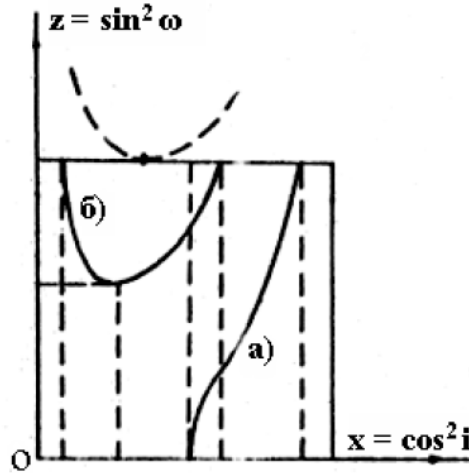
- $\sin^2 \omega$ мәндері 0 мен 1 арасында өзгереді;

- Перицентрлік қашықтық өседі – апсид сызықтарының прецессиясы болады;

- i_1 ден i_2 дейін орбита еңкею периодтық түрінде өзгереді.

б) жағдайында:

- Перицентрлік қашықтық тек белгілі аралығында өзгереді:
 $90^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 90^\circ + \Delta\omega_2$ немесе $270^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 270^\circ + \Delta\omega_2$ - апсид сызықтарының либрациясы болады;
- i_1 ден i_2 дейін орбита еңкеюі өзгереді.
-



5 сурет – Серік орбитасының перицентрлік қашықтықтың ұйытқуы: ротациялық (а) және либрациялық (б)

Орташаланған жанасатын Делоне элементтері - G, g, h арқылы жазылған эволюциялық теңдеулерінің шешімі

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\frac{15}{8} \frac{\mu_1}{r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot \frac{(L_0^2 - G^2)(G^2 - H^2)}{G^2} \sin 2g, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{\mu_1}{r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot G \left(2 - 5 \frac{G^4 - L_0^2 H_0^2}{G^4} \sin^2 g \right), \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{\mu_1}{r_1^3} \cdot \frac{L_0^2}{\mu^2} \cdot H_0 \left(1 + 5 \frac{G^2 - L_0^2}{L_0^2} \sin^2 g \right). \end{aligned} \quad (35)$$

5. Планетаның жасанды серік қозғалысына атмосфера кедергісінің әсері

Жылдамдықтардың жоғары мәндерінде орта кедергісінің күші осы ортаның тығыздығы мен қозғалыс жылдамдығының квадратына пропорционал болады және жылдамдық векторына қарама қарсы бағытталады. Кедергі күшінің үдеуі

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{c_x}{m} \rho S_x V \vec{V}, \quad (36)$$

Осында c_x - кедергі коэффициенті, m - серіктің массасы, S_x - $\vec{V}$ жылдамдық векторына перпендикуляр серік қисынның ауданы, ρ - атмосфера тығыздығы. Сонда

$$\vec{F} = -c\rho V\vec{V}. \quad (37)$$

Атмосфера тығыздығы h биіктікке тәуелді болады. Егер атмосфера гидростатикалық тепе-теңдік күйінде болса

$$dp = -g\rho dh, \quad (38)$$

Және идеал газдың күй теңдеуіне сәйкес келсе, сонда келесі теңдеуін алуға болады

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\bar{\mu}g}{RT}dh = -\frac{dh}{H}, \quad (39)$$

осында $\bar{\mu}$ - атмосфераның салыстырмалы молекулярлы массасы, T - оның температурасы, R - универсалды газ тұрақтысы, H - атмосфераның биіктік шкаласы. Ауырлық күшінің үдеуі биіктікке тәуелді болады

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R_0 + h)^2}, \quad (40)$$

R_0 - планета радиусы, M - оның массасы. Жоғары атмосфераның (термосфераның) температурасы биіктікке байланысты өзгереді, себебі Күннің қысқатолқынды және корпускулярлы сәулеленуі арқылы атмосфера жылыды. Және биіктікке байланысты $\bar{\mu}$ - атмосфераның салыстырмалы молекулярлы массасы азаяды. Сонымен, жоғары атмосферада атмосфераның биіктік шкаласы өзгереді, биіктікке байланысты үлкееді, сондықтан (5.39) интегралдау арқылы

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{dh}{H(h)}\right). \quad (41)$$

Серіктің қозғалысы болатын биіктіктегі атмосфера тығыздығы қарастырамыз, немесе серік орбитасының перицентр мен апоцентр арасындағы биіктіктерді. Егер орбита эксцентриситеті үлкен болмаса, сонда

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp\left(-\frac{r - r_\pi}{H_\pi}\right), \quad (42)$$

осында ρ_π және H_π - серік орбитасының перицентрдегі тығыздық пен атмосфераның биіктік шкаласы. Орбитаның центріне қашықтық

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (43)$$

сонда айырымы

$$r - r_\pi = a(1 - e \cos E), \quad (44)$$

ал атмосфера тығыздығы

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp(-\alpha(1 - \cos E)), \quad (45)$$

және өлшемсіз параметр

$$\alpha = \frac{ae}{H}. \quad (46)$$

Атмосфераның жылуы Күннің қысқатолқынды және корпускулярлы сәулеленуінің мөлшері мен планетаның еңдігіне, тәуіліктің уақытына, жыл мерзіміне және Күн белсенділік циклдың фазасына байланысты болады. Сондықтан жоғары атмосферасының температурасы және оның биіктік шкаласы кең интервалында өзгеру мүмкін. Жердің жасанды серіктері Жер атмосферасының 200-400 км биіктерінде қозғалады, сонда биіктік шкаласы 30-100 км аралығында өзгереді.

Жанасатын элементтер арқылы теңдеулерін алу үшін атмосфераның кедергі күшінің радиус-векторға байланысты S - радиалды және T - нормалды компоненттерін анықтау керек

$$S = -c\rho \frac{\mu}{p} e \sin \nu \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}, \quad (47)$$

$$T = -c\rho \frac{\mu}{p} (1 + e \cos \nu) \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}.$$

Сонда

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \quad (48a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2},$$

$$\frac{de}{dt} = -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos \nu + e) \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}, \quad (48a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \nu}{e} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}.$$

(48)-дің бірінші екі теңдеу арқылы: $\Omega = \Omega_0, i = i_0$. Осыдан келесі факт айқындалады: жанасатын орбита жазықтығында орналасқан атмосфераның кедергі күші, осы жазықтықтың орналасуын өзгертпейді. Фокалды параметр мен эксцентриситеттің орташа мәндері үшін эволюциялық қозғалыс теңдеулері:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -2cnp^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}{(1+e\cos\nu)^2} d\nu, \\ \frac{de}{dt} &= -2cnp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{(\cos\nu+e)\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}{(1+e\cos\nu)^2} d\nu.\end{aligned}\tag{49}$$

Уақыт өзгеруімен атмосфера кедергінің әсерінен фокалды параметрдің және эксцентриситеттің орташа мәндері азаяды. Сондықтан серіктің ұшу биіктігі төмендейді және оның орбитасы шеңбер түріне жақын болады. Кейінірек, атмосфераның тығыз қабаттарына түскен кезінде кіші серіктер өртеніп кетеді, ал үлкен объектілер жойылады.

Бақылау сұрақтары

1. Табиғи және жасанды аспан денелерінің ұйытқымалы қозғалысы несімен ерекшеленеді?
2. Орталық дененің пішіні мен тығыздалуы серік орбитасына қандай әсер етеді?
3. Орталық дененің экваторлық дөңестігі ұйытқуларға қалай ықпал етеді?
4. Екі жылжымайтын центр есебі дегеніміз не және оның физикалық мағынасы қандай?
5. Эволюция теңдеулері не үшін қолданылады және олар қандай шамаларды сипаттайды?
6. Атмосфера кедергісі серіктің орбитасының биіктігіне және периодының өзгеруіне қалай әсер етеді?

Әдебиеттер

1. Алимгазина Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.